Титульник

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc100691484)

[1. Общий подход к измерению вероятностных характеристик в информационных системах управления качеством в автоматизированных автоматических производствах 4](#_Toc100691485)

[1.1. Аналоговые измерители математического ожидания и дисперсии 6](#_Toc100691486)

[1.2. Цифровые измерители математического ожидания и дисперсии 7](#_Toc100691487)

[1.3. Оценка дисперсии 9](#_Toc100691488)

[2. Моделирование случайных событий, величин и процессов в информационных системах управления качеством 11](#_Toc100691489)

[2.1. Метод статистических испытаний 11](#_Toc100691490)

[2.2. Алгоритмы статистического моделирования 14](#_Toc100691491)

[2.3. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения и моделирование случайных событий 18](#_Toc100691492)

[2.4. Моделирование систем 22](#_Toc100691493)

[Список литературы 31](#_Toc100691494)

# Введение

В информационных измерительных системах, контролируемых параметры технологических процессов, большую роль имеют случайные процессы. Анализ различных задач показывает, что почти любой сигнал, несущий информацию, можно рассматривать как случайный, точнее стохастический.

Изучение случайных процессов требует применения статических методов анализа. При статическом подходе нет необходимости определять точный результат отдельного измерения, а можно основываться на исследование множества опытов. Случайные процессы наиболее полно описываются законами распределения вероятностей: одномерными, двумерными и т.д.

Поэтому изучение случайных процессов в автоматизации автоматических производств является актуальной задачей.

В процессе выполнения работы рассматриваются вопросы об измерениях вероятностных характеристик в информационных системах управления качеством, а также о моделировании случайных событий, величин и процессов в автоматизированных автоматических производствах.

# 1. Общий подход к измерению вероятностных характеристик в информационных системах управления качеством в автоматизированных автоматических производствах

В информационных измерительных системах, контролируемых параметры технологических процессов, большую роль имеют случайные процессы. Анализ различных задач показывает, что почти любой сигнал, несущий информацию, можно рассматривать как случайный, точнее стохастический.

Изучение случайных процессов требует применения статических методов анализа. При статическом подходе нет необходимости определять точный результат отдельного измерения, а можно основываться на исследование множества опытов. Случайные процессы наиболее полно описываются законами распределения вероятностей: одномерными, двумерными и т.д.

Измерение параметров и характеристик случайных процессов существенно упрощается при его стационарности и эргодичности. Стационарными называются случайные процессы, статические характеристики которых не изменяются во времени. Свойства стационарных процессов характеризуют следующими условиями: математическое ожидание стационарного случайного процесса постоянно, дисперсия по сечениям является постоянной величиной[[1]](#footnote-1).

При исследованиях случайных процессов отражают его отдельными реализациями. Полное представление о случайном процессе можно получить с помощью бесконечной совокупности его реализаций или их, так называемого ансамбля.

Ансамбль реализаций – математическая абстракция, аналитическая модель случайного процесса.

Конкретные реализации, наблюдаемые при исследованиях, представляют собой физические процессы, явления или объекты и входят в ансамбль как его неотъемлемая часть. Например, ансамблем реализации случайного процесса является группа сигналов, наблюдаемых одновременно с помощью многоканального осциллографа на выходах идентичных генераторов шумового напряжения, полученных в результате изменения ряда неслучайных функций .

Обычно реальные информационные случайные процессы относятся к стационарным. Подавляющее большинство случайных процессов обладает свойством эргодичности. Случайный процесс является эргодическим, если усреднение по ансамблю реализаций можно заменить усреднением по времени одной реализации в пределах бесконечно длинного интервала .

Основные числовые характеристики стационарного эргодического случайно процесса:

* матожидание случайного процесса вычисляют путем усреднения значения заданной реализации.
* дисперсия случайного процесса.

На практике вместо среднего значения, дисперсии и СКО результата измерения случайного процесса находят их оценки.

Различают две группы статистических характеристик случайных процессов:

* распределение его значения во времени (матожидание, дисперсия, функция распределения, функция корреляции);
* распределение энергии процесса по частоте (спектральная плотность)[[2]](#footnote-2).

## 1.1. Аналоговые измерители математического ожидания и дисперсии

Если функции представляют ток или напряжение, то в роли аналогового интегратора могут выступать интегрирующие RC-цепочки или интегратор на ОУ с емкостной отрицательной ОС (рис. 1.1).

С помощью электронного ключа Кл задается время интегрирования (опроса ) входного сигнала. . При Кл размыкается и находится в этом положении до момента , после чего замыкается. За время осуществляется усреднения входного сигнала .

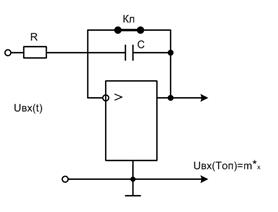


Рис. 1.1 – Интегратор ОУ с емкостной отрицательной ОС

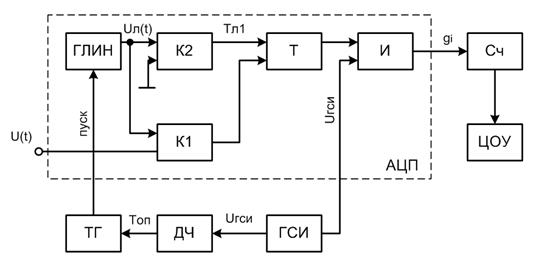
Через замкнутый ключ и ОУ конденсатор разряжается почти мгновенно. Для получения оценки среднего значения исследуемого необходимо измерить на интервале времени .

Для измерения дисперсии можно использовать вольтметр среднего квадратического значения. Такой вольтметр должен отвечать следующим требованиям[[3]](#footnote-3):

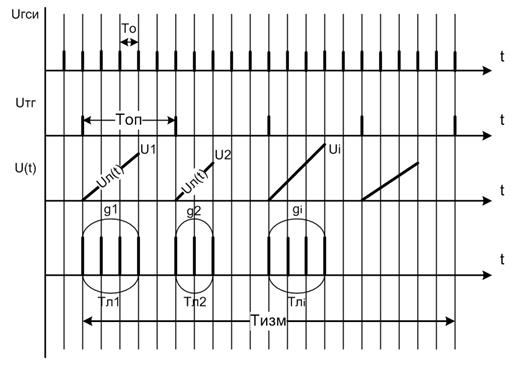
* иметь закрытый вход, т.е. не пропускать постоянную составляющую для получения интегрированной величины;
* обладать большой протяженностью квадратичного участка характеристики детектора, т.к. измеряемые напряжения могут отличаться большими величинами отношения пикового значения к СКО (детектор при детектировании возводит в квадрат);
* иметь высокую чувствительность в широком диапазоне исследуемых частот.

## 1.2. Цифровые измерители математического ожидания и дисперсии

Упрощенная схема цифрового измерителя матожидания и эпюры приведены на рис. 1.2.



а)



б)

Рис. 1.2 – Упрощенная схема цифрового измерителя матожидания (а) и эпюры (б): ТГ – тактовый генератор, ДТ – делитель частоты

Рабочий цикл цифрового измерителя задают опорные импульсы ТГ, который управляет генератором линейно изменяющегося напряжения ГЛИН. Последний входит в состав схемы время импульсного АЦП. Управление схемой осуществляет ГСИ, сигнал которого поступает и на один из входов схемы «И» и на ДУ. Коэффициент деления ДУ выбирают кратным 10. на выходе ДУ формируются импульсы, имеющие достаточно большой период следования, задающий интервал опроса .

Импульсы управления Uтг, поступающие с периодом повторения с тактового генератора, командой ПУСК запускают ГЛИН, сигнал которого в компараторе К1 сравнивается с исследуемым сигналом .

Одновременно с началом работы ГЛИН компаратор К2 подает разрешающий сигнал на вход триггера Т, который открывается и на входах схемы «И» появляются сигналы. В результате от начала команды ПУСК импульсы ГСИ через схему «И» поступают на счетчик СЧ.

Процесс подсчета импульсов ГСИ счетчика прекратится при сравнении напряжения, вырабатываемого ГЛИН, с выходным . При этом на компаратор К1 поступит сигнал, опрокидывающий триггер. Время подсчета импульсов в каждом цикле опроса равен длительности работы ГЛИН.

После окончания времени цикла Топ с приходом следующего опорного сигнала снова произойдет запуск ГЛИН, и в счетчике будут записаны данные следующего цикла и т.д[[4]](#footnote-4).

Если количество циклов измерений n, то с учетом что ( – количество импульсов за время опроса: , где , коэффициент пропорциональности, характеризующий крутизну напряжения ГЛИН, – значение входного напряжения в момент сравнения) общее количество импульсов, записанное счетчиком за время :

Среднее значение исследуемого напряжения

Подсчитанная оценка среднего значения отображается на ЦОУ.

## 1.3. Оценка дисперсии

При вычислении дисперсии необходимо провести интегрирование среднего значения, а затем возвести в квадрат полученный результат.

Структурная схема цифрового измерителя дисперсии представлена на рис. 1.3.

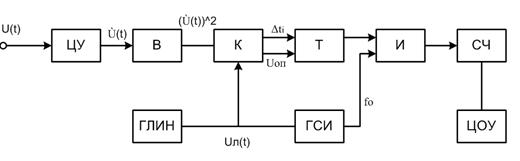


Рис. 1.3 – Структурная схема цифрового измерителя дисперсии: ЦУ – центрирующее устройство (отбирает переменную составляющую, центрирует ее); В – двух полупериодный выпрямитель

С помощью ЦУ из исследуемого сигнала выделяется переменная составляющая , поступающая на вход двухпериодного выпрямителя В. Выпрямленный сигнал компаратором К преобразуется во временной интервал , путем сравнения его с вырабатываемым ГЛИН линейно изменяющимся :

где – коэффициент преобразования ГЛИН.

В результате получаем интервал

где – коэффициент преобразования компаратора. Напряжение ГЛИН управляет частотой ГСИ, определяемой как

где – коэффициент преобразования ГСИ.

Счетные импульсы попадают на вход схемы совпадения «И», на другой вход которой через триггер Т с компаратора К подается импульс длительностью . Триггер открывается напряжением , действующим на интервале .

Т.О. на счетчик СЧ за длительность очередного импульса с ГСИ через схему «И» поступает определенное кол-во импульсов . За время измерений счетчик регистрирует число импульсов, определяемое:

Разделив импульсов на получим оценку дисперсии:

Полученные результаты отображаются на ЦОУ. Цифровой измеритель дисперсии случайного процесса, также как и матожидания, управляется тактовым генератором, который для упрощения на схеме не показан. Поэтому представляет собой импульсы ТГ[[5]](#footnote-5).

# 2. Моделирование случайных событий, величин и процессов в информационных системах управления качеством

Математическое моделирование – это построение и использование математических моделей для исследования поведения систем (объектов) в различных условиях, для получения (расчета) тех или иных характеристик оригинала без проведения измерений или с небольшим их количеством.

## 2.1. Метод статистических испытаний

Метод статистического моделирования заключается в воспроизведении исследуемого процесса при помощи вероятностной математической модели и вычислении характеристик этого процесса. Основан метод на многократном проведении испытаний построенной модели с последующей статистической обработкой полученных данных с целью определения характеристик рассматриваемого процесса в виде статистических оценок его параметров[[6]](#footnote-6).

Рассмотрим уравнение:

где – параметр системы, требующий определения; – фазовая переменная; – время; – случайный параметр, закон распределения которого нам известен.

Если функция существенно нелинейна, то для решения данной задачи нет универсальных методов решения, и достаточно полно отработанные регулярные методы поиска оптимальных решений можно применить только поставив во главу угла видимость использования математики, упрощения приведут к серьезной потере точности. Математическая модель станет неадекватной исследуемой системе, и моделирование будет только формой заблуждения.

Однако, если удается построить функцию и датчик случайных чисел с заданным законом распределения, то значение может быть вычислено как

где – значение i-ой реализации.

Если является аналитической моделью процесса преобразования информации или технологического процесса обработки детали, то будет статистической моделью. Важно то, что при построении функции и датчика случайных чисел на бумаге в подавляющем большинстве случаев достаточно легко реализовать их на ЭВМ в рамках соответствующего программного обеспечения. При этом результаты будут содержать ошибку, но эта ошибка меньше, нежели ошибки из-за допущений в аналитической модели. Кроме того, ошибка из-за применения статистической модели может быть количественно оценена.

Этот прием распространяется и на более сложные случаи, когда уравнение (1) содержит не только случайные параметры, но и случайные функции.

После получения на ЭВМ реализаций следует этап обработки статистики, позволяющий рассчитать, наряду с математическим ожиданием (2) и другие параметры , например дисперсию .

В методе статистических испытаний для получения достаточно надежных результатов необходимо обеспечивать большое число реализаций , кроме того, с изменением хотя бы одного исходного параметра задачи необходимо производить серию из испытаний заново. При сложных моделях неоправданно большая величина может стать фактором, задерживающим получение результата. Поэтому важно правильно оценить необходимое число результатов. Доверительный интервал , доверительная вероятность , дисперсия и число реализаций связаны соотношением

где – функция, обратная функции Лапласа.

На практике можно воспользоваться соотношением

для принимая, с целью надежности, наибольшее значение из соотношения (4). Оценка дисперсии может быть получена предварительно с помощью той же статистической модели при числе реализаций , .

При построении статистических моделей информационных систем используется общий и прикладной математический аппарат[[7]](#footnote-7). В качестве примера можно привести аппарат систем массового обслуживания. Система массового обслуживания (СМО) – система, предназначенная для выполнения потока однотипных требований случайного характера. Статистическое моделирование СМО заключается в многократном воспроизведении исследуемого процесса (технического, социального и т.д.) при помощи вероятностной математической модели и соответствующей обработке получаемой при этом статистики. Существуют пакеты программ статистического моделирования СМО, однако они требуют определенных усилий для их освоения и не всегда доступны. Поэтому в рамках дисциплины предлагается достаточно простой подход, позволяющий с наименьшими затратами моделировать простые СМО. При этом предполагается, что пользователь ознакомлен с теорией массового обслуживания и имеет навыки работы на компьютере. Следует помнить, что массовое обслуживание – важный, но далеко не единственный предмет статистического моделирования. На основе этого метода решаются, например, задачи физики (ядерной, твердого тела, термодинамики), задачи оптимизации маршрутов, моделирования игр и т.п.

## 2.2. Алгоритмы статистического моделирования

Существуют две схемы статистического моделирования[[8]](#footnote-8):

* моделирование по принципу особых состояний;
* моделирование по принципу .

Порядок моделирования по принципу особых состояний заключается в выполнении следующих действий:

1) случайным образом определяется событие с минимальным временем – более раннее событие;

2) модельному времени присваивается значение времени наступления наиболее раннего события;

3) определяется тип наступившего события;

4) в зависимости от типа наступившего события осуществляется выполнение тех или иных блоков математической модели;

5) перечисленные действия повторяются до истечения времени моделирования.

В процессе моделирования производится измерение и статистическая обработка значений выходных характеристик. Эта схема моделирования хорошо подходит для систем массового обслуживания в традиционном их описании. Обобщенный алгоритм моделирования по принципу особых состояний представлен схемой на рис. 2.1.

Моделирование по принципу осуществляется следующим образом:

1) устанавливаются начальные состояния, в т. ч. ;

2) модельному времени дается приращение ;

3) на основе вектора текущих состояний элементов модели и нового значения времени рассчитываются новые значения этих состояний; за может наступить одно событие, несколько событий или же может вообще не происходить событий; пересчет состояния всех элементов системы – более трудоемкая процедура, нежели любой из блоков реакции модели, построенной по принципу особых состояний;

4) если не превышено граничное время моделирования, предыдущие пункты повторяются.

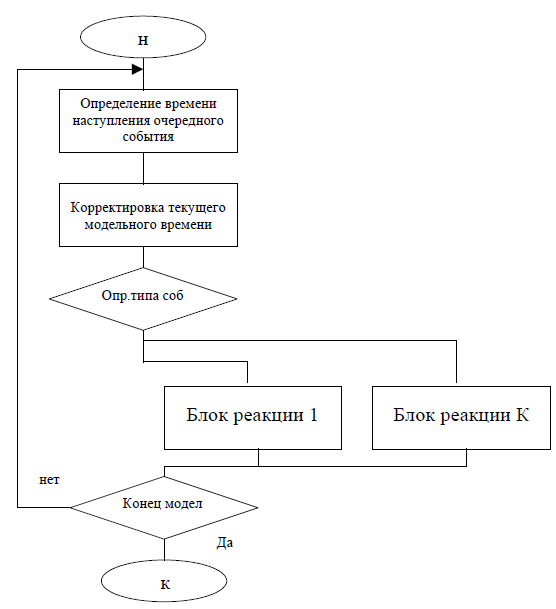


Рис. 2.1 – Обобщённый алгоритм моделирования по принципу особых состояний

В процессе моделирования производится измерение и статистическая обработка значений выходных характеристик. Эта схема моделирования применима для более широкого круга систем, нежели моделирование по принципу особых событий, однако есть проблемы с определением . Если задать его слишком большим – теряется точность, слишком малым – возрастает время моделирования.

На основе базовых схем моделирования можно строить комбинированные и диалоговые схемы, в которых моделирование идет под контролем оператора с возможностью внесения изменений как в исходные данные, так и в математическую модель процесса.

Структура алгоритма модели, построенной по принципу , проще структуры, построенной по принципу особых состояний. Программная реализация моделей, построенных по одной и той же реальной системе в одной и той же системе программирования, но по разным принципам статистического моделирования, имеет практически одинаковую трудоемкость.

В процессе разработки модели можно условно выделить такие этапы описания, как концептуальный, математический и программный. Кроме того, кроме собственно разработки модели необходимо выполнить еще ряд действий, без которых моделирование не может привести к требуемому результату. Итак, рекомендуемый порядок работ в рамках статистического моделирования. Этот порядок не является жестким, но все рекомендованные действия придется выполнять (пусть не всегда в указанной последовательности), к некоторым в процессе работы придется возвращаться.

1) создание концептуальной модели. Концептуальная модель – это абстрактная модель, определяющая состав и структуру исследуемой системы, свойства элементов и связей. Строится обычно в словесно-графической форме;

2) подготовка исходных данных. Этот этап включает в себя:

* сбор фактических данных (измерения, анализ документов, метод экспертных оценок);
* подбор законов распределения случайных величин (по численным значениям параметра строится гистограмма распределения, затем она аппроксимируется кривой, потом эта кривая сравнивается с кривыми плотности распределения различных теоретических законов, выбирается наиболее подходящий из них и проводится оценка степени совпадения эмпирического и теоретического распределения).

В случае необходимости на этом этапе возможны аппроксимация функций, описывающих связи между элементами и выдвижение гипотез по значению новых элементов или параметров;

3) разработка математической модели. Создание математической модели преследует две основные цели: дать формализованное описание структуры и процесса функционирования системы для однозначности их понимания и попытаться представить процесс функционирования в виде, допускающем аналитическое исследование системы. Разработка единой методики создания математических моделей не представляется возможной. Для начинающих исследователей эффективен путь адаптации одной из уже известных математических моделей к условиям стоящей перед ними задачи;

4) выбор метода моделирования. Разработанная математическая модель может быть исследована аналитически и статистически, во втором случае – по принципу особых состояний или по принципу . Если модель позволяет, лучше провести аналитическое исследование, но это возможно далеко не всегда. Как правило, не имеет значения, моделировать по принципу особых состояний или по принципу , это часто определяется выбором средства моделирования.

5) выбор средств моделирования. Рекомендуется следующая последовательность выбора:

– применить готовые специальные программы, здесь – их освоение, подготовка данных, анализ результатов. Эти средства должны быть корректными. Является грубейшей ошибкой жертвовать адекватностью модели с целью применения того или иного средства моделирования. Если готовых средств нет, то: применить средства хорошо зарекомендовавших себя пакетов программ, лучше – ориентированных на моделирование. В данном случае придется изучать возможности и порядок работы, готовить данные в специфическом виде, но это не самый тяжелый путь; разрабатывать свое программное средство, используя те или иные среды программирования.

6) проверка адекватности и корректировка модели. Проверка адекватности модели необходима, так как по неверным результатам моделирования могут быть приняты неверные решения. Проверка может производиться путем сравнения показателей, полученных на модели, с реальными, а также путем экспертного анализа. Желательно проведение такого анализа независимым экспертом. Если по результатам проверки адекватности выявляются недопустимые расхождения между системой и ее моделью, в модель вносят необходимые изменения;

7) проведение экспериментов с моделью. Этот этап связан с выполнением предыдущего этапа, а также с определением необходимой точности и, как следствие, числа прогонов программы модели. Кроме того, рекомендуется не включать в статистику результаты начала моделирования, пока модель не войдет в стационарный режим (ориентировочно 5 – 7 событий, 100 – 200 ).

И главное – получение статистических оценок функционирования системы в результате выполнения программы модели на ЭВМ; анализ и использование результатов моделирования. Это целиком зависит от того, с какой целью проводилось моделирование.

## 2.3. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения и моделирование случайных событий

Метод статистических испытаний базируется на использовании случайных чисел – возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей[[9]](#footnote-9).

При использовании для моделирования ЭВМ в подавляющем большинстве применений генерация любых случайностей начинается с генерации случайных чисел с равномерным распределением в диапазоне (0,1) с помощью программы – датчика случайных чисел. Наиболее просто случайные числа в диапазоне (0,1) получаются из рекуррентного соотношения

где и – константы; – достаточно большое целое положительное число.

При соответствующем выборе констант и задания некоторого исходного значения эта формула позволяет получить последовательность целых чисел, равномерно распределенных в интервале . Последовательность имеет период повторения, равный , поэтому точнее называть эти числа псевдослучайными. Наличие периода повторений может отрицательно сказываться при моделировании с числом реализаций, превышающим значение периода повторений. Для увеличения периода повторения без изменения часто применяют специальные приемы «взбадривания» датчика, обычно это заключается в пересмотре .

Случайные числа , равномерно распределенные в диапазоне (0,1) получают из чисел диапазона с помощью масштабного преобразования.

Все доступные системы программирования имеют встроенные подпрограммы – датчики случайных чисел диапазона (0,1), поэтому при статистическом моделировании получение равномерно распределенных в диапазоне случайных величин сводится к пересчету

где – обращение к машинному датчику случайных чисел.

Для экспоненциально распределенных величин

Для распределения Релея

Для нормального закона распределения можно воспользоваться положением центральной предельной теоремы. Если набрать сумму из значений , то эта сумма будет случайной величиной со средним и дисперсией . Вычитание из суммы значения и деление полученной разности на дают случайную величину , распределенную (при достаточно больших ) по нормальному закону с нулевым матожиданием и единичной дисперсией. Для ускорения вычислений рекомендуется выбирать .

Тогда

, для ;

, для ;

, для .

Увеличение ведет к возрастанию точности, но замедляет процесс моделирования. Для простых задач достаточно . Переход к нормальным распределениям с ненулевым ожиданием и дисперсией, отличной от 1, осуществляется по следующей формуле:

где – среднеквадратическое отклонение требуемого нормального распределения; – его математическое ожидание.

Для получения дискретных случайных величин в ряде редких случаев применяют известные соотношения, как например для биномиального распределения

случайные величины определяются

где , если ; , если .

Когда расчетные соотношения неизвестны и нет возможности их вывести, можно прибегнуть к табличному заданию случайной величины, используя для определения индекса - указателя элемента таблицы (это годится как для непрерывных, так и для дискретных величин).

В реальных системах объекты могут находиться в том или ином дискретном состоянии, что влияет на работу системы в целом. Например, дисковод компьютера занят или свободен в данный момент, программа загружена или нет, идет этап технологического процесса, или он уже завершен и т.д.

При моделировании факт смены (или подтверждения) объектом своего состояния называют событием. Моделирование случайных событий обычно заключается в формировании определенного дискретного значения на основе одной или нескольких случайных величин с соответствующими законами распределения. Случайные события могут быть одиночными или образовывать группы, они могут быть зависимыми или независимыми.

Моделирование одиночного события , наступающего с вероятностью , определяется как событие, состоящее в том, что выбранное значение случайной величины , удовлетворяет неравенству . В дальнейшем принимают , если и в противном случае.

Моделирование полной группы несовместных событий , , наступающих с вероятностями , , определяется как событие, состоящее в том, что выбранное значение случайной величины удовлетворяет неравенству , где величины , , представляют собой границы интервалов, определяемых как

Процедура моделирования испытаний рассматриваемого вида состоит в выборе значений и сравнении их с величинами . Исходом испытания является событие , соответствующее номеру m-го интервала, в которое попало число .

Моделирование сложных независимых событий возможно в двух вариантах.

В варианте 1 последовательно проверяются условия и . Если оба условия выполняются- фиксируется наступление сложного события.

Вариант 2 основывается на методике моделирования полной группы событий (нужно строить интервалы). По скорости предпочтительнее вариант 1.

Моделирование сложных зависимых событий рекомендуется производить в следующей последовательности (для двух событий):

* если и , то фиксируется событие ;
* если и , то фиксируется событие ;
* если и , то фиксируется событие ;
* если и , то фиксируется событие .

Этот прием легко распространяется и на большее число событий.

## 2.4. Моделирование систем

Целями моделирования информационных систем чаще всего являются оценка их производительности и надежности. В ответственных случаях оцениваются и другие показатели. Оценка обычно производится в интересах решения задач оптимизации.

Производительность и надежность информационных систем связаны с временными аспектами функционирования и зависят в первую очередь от параметров аппаратурно-программных средств, которые обобщающе называются вычислительной системой. При оценке производительности первостепенное значение имеет продолжительность вычислительных процессов[[10]](#footnote-10).

При оценке надежности исследуется продолжительность пребывания системы в различных состояниях, которые меняются из-за отказов в устройствах и программах и последующего восстановления работоспособности. Для вычислительных систем типично наличие случайных факторов, влияющих на характер протекания процессов. Продолжительность процессорной обработки, число, порядок и параметры обращений к периферийным устройствам зависят от исходных данных, которые порождаются вне системы и носят для нее случайный характер. Случайными являются потоки отказов и времена восстановления отказавших элементов. В связи с этим при оценке функционирования вычислительных систем используется вероятностный подход.

Этот подход предполагает, что на процессы воздействуют случайные факторы и свойства процессов и системы в целом проявляется статистически на множестве их реализаций.

Процессы, происходящие в вычислительных системах, представляются в моделях как непрерывные или дискретные случайные процессы. При исследовании вычислительных систем чаще всего приходится иметь дело с дискретными случайными процессами, определенными на конечном множестве состояний, причем процессы рассматриваются или в непрерывном, или в дискретном времени.

Вероятностный подход к описанию функционирования вычислительных систем приводит к использованию аппарата теории вероятностей и математической статистики в качестве математической базы методов исследования. Случайные величины, соответствующие параметрам элементов моделей, могут представляться на разных уровнях, среди которых наиболее широко используются четыре:

1) статистическая выборка , определяющая случайную величину набором значений;

2) закон распределения случайной величины с его параметрами;

3) математическое ожидание и дисперсия;

4) математическое ожидание.

На первом уровне случайная величина определяется наиболее полно (при достаточности статистической выборки), на последнем – наименее детально.

При моделировании вычислительных систем применяют различный математический аппарат, наиболее часто – теорию марковских процессов и аппарат теории массового обслуживания.

Марковским называется случайный процесс, состояние которого в очередной момент времени зависит только от текущего состояния и не зависит от предыстории процесса. В классе марковских процессов выделяют процессы с дискретными состояниями, называемые марковскими цепями. Когда множество состояний процесса конечно, марковская цепь называется конечной. Конечная марковская цепь может быть определена в непрерывном или дискретном времени. В первом случае переходы процесса из одного состояния в другое связываются с произвольными моментами времени и цепь называют непрерывной; во втором переходы идут только в фиксированные моменты времени, обозначаемые порядковыми номерами и цепь называется дискретной.

Дискретная марковская цепь определяется:

1) множеством состояний ;

2) матрицей вероятностей переходов (или переходных вероятностей), характеризующей вероятности перехода процесса с текущим состоянием в следующее состояние ;

3) вектором начальных вероятностей , определяющим вероятность того, что в начальный момент времени t = 0 процесс находится в состоянии .

Марковские цепи классифицируются в зависимости от возможности перехода из одних состояний в другие. Основными являются два класса: поглощающие и эргодические цепи.

Поглощающая марковская цепь содержит поглощающее состояние, достигнув которого процесс уже никогда его не покидает, по сути дела это моделирует прекращение процесса. Из какого бы состояния ни начался процесс, при с вероятностью 1 он окажется поглощающем состоянии .

Основная характеристика процесса, порождаемого поглощающей марковской цепью, – число пребывания процесса в состояниях до момента поглощения. Поглощающие марковские цепи используются в качестве моделей программ. При моделировании программы состояния цепи отождествляются с блоками программы, а матрица переходных вероятностей определяет порядок переходов между блоками, зависящий от структуры программы и распределения исходных данных, значения которых влияют на развитие вычислительного процесса. В результате удается вычислить число обращений к блокам программы и время выполнения программы.

Аналогично можно представить и работу с аппаратурной частью, когда состояния отображают использование отдельных устройств компьютера.

Эргодическая (возвратная) марковская цепь представляет собой множество состояний, связанных матрицей переходных вероятностей таким образом, что из какого бы состояния процесс ни исходил, после некоторого числа шагов он может оказаться в любом состоянии, в том числе и исходном.

Процесс, порожденный эргодической цепью, начавшись в некотором состоянии, никогда не завершается, а последовательно переходит из одного состояния в другое, попадая в различные состояния с разной частотой, зависящей от переходных вероятностей. Поэтому основная характеристика эргодической цепи – вероятности пребывания процесса в состояниях .

Эргодические цепи используются в качестве моделей надежности систем.

При этом состояния системы, различающиеся составом исправного и отказавшего оборудования, трактуются как состояния эргодической цепи, переходы между которыми связаны с отказами и восстановлениями устройств и реконфигурацией связей между ними, проводимой для сохранения работоспособности системы в целом. Оценки характеристик эргодической цепи дают представление о надежности поведения системы.

Кроме того, эргодические цепи используются в качестве базовых моделей взаимодействия устройств с задачами, поступающими на обработку.

Марковский процесс, в котором переходы между состояниями разрешаются в любой момент времени, называется непрерывной марковской цепью. Однородная непрерывная марковская цепь, поведение которой в любой момент времени подчиняется одному и тому же закону, задается матрицей интенсивности переходов ; .

Интенсивность переходов определяется следующим образом:

где – вероятность перехода процесса из состояния в состояние за время .

Вероятность перехода процесса в любое новое состояние равна .

Основная характеристика непрерывной марковской цепи – стационарное (финальное) распределение вероятностей состояний , где – вероятность пребывания процесса в состоянии .

В теории массового обслуживания изучаются системы, на вход которых поступает случайный поток заявок (требований), приходящихся в общем случае на случайные моменты времени. Поступившая заявка обслуживается в системе путем предоставления ей некоторых ресурсов на какое-то время и, будучи в той или иной мере обслуженной, покидает систему. Наиболее характерный момент функционирования систем массового обслуживания – это наличие очередей, в которых заявки ждут момента освобождения ресурсов, занятых обслуживанием других заявок[[11]](#footnote-11).

В простейшем случае система массового обслуживания (СМО) определяется потоком заявок, длиной очереди и дисциплиной обслуживания (порядком выбора заявок из очереди), числом каналов (приборов) обслуживания, распределением длительности обслуживания. В более сложных случаях рассматривается надежность приборов обслуживания. Исследование СМО заключается в определении ее пропускной способности, времени ожидания заявки в очереди, загрузки каналов обслуживания. Структура многоканальной однофазной СМО приведена на рис. 2.2. Многоканальной называется такая СМО, где заявка может получить определенный тип обслуживания в одном из нескольких каналов.

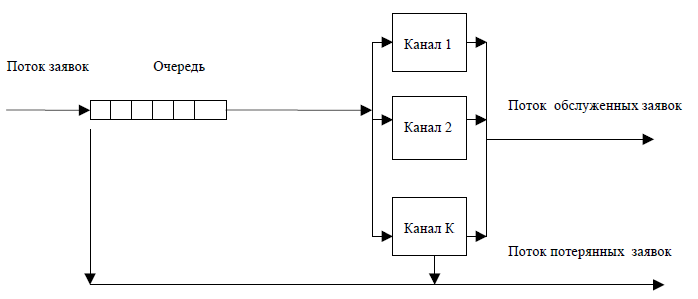


Рис. 2.2 – Структура многоканальной однофазной СМО

Многофазной называется СМО, характер обслуживания в которых является многоэтапным, например переход заготовки от станка к станку, на совокупности которых реализуется технологический процесс изготовления детали.

Поток заявок физически представляет собой явления одной природы, например покупатели в магазине, посетители в парикмахерской, попытки позвонить по телефону, желания решить задачу с использованием компьютера и т.д. С математической точки зрения поток заявок на обслуживание характеризуется законом распределения случайной величины – времени между появлением соседних заявок.

Число мест в очереди – это число заявок, которые могут ожидать обслуживания, находясь в СМО. По ограничению очереди СМО разделяются на системы с нулевой длиной очереди, на системы с конечной (определенной) длиной очереди и системы с неограниченной длиной очереди. В системах с нулевой и конечной длиной очереди имеют место отказы – ситуации, когда в системе нет свободных каналов и все места в очереди уже заняты. Заявка, попавшая на отказ, считается потерянной.

Дисциплина очереди может быть без приоритетов или с приоритетами.

И в том, и в другом случае выборка заявок на обслуживание может осуществляться по правилам: «первый пришел – первый вышел», «последний пришел – первый вышел», выбор заявки из очереди может быть организован случайным образом.

Время обслуживания заявки является случайной величиной. В общем случае производительность различных каналов СМО является различной, и время обслуживания конкретной заявки зависит от того, на какой канал она попала. В простейшем случае все каналы одинаковы. При анализе СМО определяется коэффициент загрузки канала – отношение времени, когда канал обслуживал заявки, к общему времени функционирования. В процессе работы каналы могут выходить из строя и восстанавливаться. В этом случае вводится понятие потока отказов и потока восстановлений, а также коэффициента готовности и коэффициента исправного действия. В общем случае заявка, во время обслуживания которой произошел отказ, считается потерянной.

Можно смоделировать повторное выполнение этой заявки или продолжение обслуживания на другом канале.

Успешно обслуженные заявки образуют поток обслуженных заявок.

Заявки, не принятые на обслуживание по занятости всех каналов и мест в очереди, а также необслуженные из-за выхода каналов из строя, образуют поток потерянных заявок. Сумма обслуженных и потерянных заявок равна числу заявок, поступивших на вход системы.

Таким образом, СМО характеризуется следующим набором параметров:

1) распределением длительности интервалов между заявками входящего потока ;

2) числом мест в очереди;

3) дисциплиной обслуживания заявок ;

4) числом обслуживающих приборов (каналов) ;

5) распределение длительности обслуживания заявок приборами ;

6) надежностью обслуживающих приборов.

Указанный набор параметров полностью определяет порядок функционирования системы. Процесс функционирования количественно оценивается следующим набором основных характеристик:

1) загрузкой – средним по времени числом приборов, занятых обслуживанием;

2) длиной очереди – средним числом заявок, ожидающих обслуживания;

3) числом заявок, находящихся в системе (в очереди и на приборах);

4) временем ожидания – средним временем пребывания заявок в очереди;

5) временем пребывания заявки в системе;

6) временем исправной работы приборов;

7) количеством обслуженных и потерянных заявок.

В многофазных СМО очереди могут быть на каждой фазе обслуживания. В тех случаях, когда возможно возвращение заявки после обслуживания на последующей фазе к обслуживанию на одной из предшествующих, говорят о более сложных образованиях - сетях массового обслуживания. Сеть массового обслуживания можно представить как совокупность узлов – отдельных СМО. Сеть массового обслуживания задается следующим набором параметров:

1) параметрами источника заявок;

2) структурой, определяющей конфигурацию связей и вероятности передачи заявок между узлами сети;

3) параметрами СМО, образующих сеть.

Функционирование сети массового обслуживания определяется совокупностью узловых и сетевых характеристик. Узловые характеристики оценивают работу каждой СМО и включают в себя весь набор их характеристик.

Сетевые характеристики оценивают функционирование сети в целом и включают в себя: 1) загрузку – среднее по времени число заявок, обслуживаемых сетью и среднее число каналов, занятых обслуживанием; 2) число заявок, ожидающих обслуживания в сети; 3) число заявок, находящихся в сети в состоянии обслуживания или ожидания; 4) суммарное время ожидания заявки в сети; 5) суммарное время пребывания заявки в сети.

# Список литературы

1. Благовещенская М.М. Информационные технологии систем управления технологическими процессами. Учеб, для вузов / М.М. Благовещенская, Л.А. Злобин – М.: Высш, шк., 2005.
2. Вальков В.М., Вершинин В.Е. Автоматизированные системы управления технологическими процессами. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Политехника, 1991.
3. Ильенкова С.Д. Управление качеством: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (080100). – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
4. Коцюба И.Ю., Чунаев А.В., Шиков А.Н. Методы оценки и измерения характеристик информационных систем. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2015.
5. Щеклеин В.С. Моделирование информационных систем: конспект лекций / В.С. Щеклеин. – Ульяновск: УлГТУ, 2002.
6. Рей У. Методы управления технологическими процессами: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

1. Вальков В.М., Вершинин В.Е. Автоматизированные системы управления технологическими процессами. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Политехника, 1991. С. 103. [↑](#footnote-ref-1)
2. Вальков В.М., Вершинин В.Е. Автоматизированные системы управления технологическими процессами. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Политехника, 1991. С. 108. [↑](#footnote-ref-2)
3. Благовещенская М.М. Информационные технологии систем управления технологическими процессами. Учеб, для вузов / М.М. Благовещенская, Л.А. Злобин – М.: Высш, шк., 2005. С. 325 [↑](#footnote-ref-3)
4. Благовещенская М.М. Информационные технологии систем управления технологическими процессами. Учеб, для вузов / М.М. Благовещенская, Л.А. Злобин – М.: Высш, шк., 2005. С. 327 [↑](#footnote-ref-4)
5. Благовещенская М.М. Информационные технологии систем управления технологическими процессами. Учеб, для вузов / М.М. Благовещенская, Л.А. Злобин – М.: Высш, шк., 2005. С. 329 [↑](#footnote-ref-5)
6. Щеклеин В.С. Моделирование информационных систем: конспект лекций / В.С. Щеклеин. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. С. 4. [↑](#footnote-ref-6)
7. Щеклеин В.С. Моделирование информационных систем: конспект лекций / В.С. Щеклеин. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. С. 6. [↑](#footnote-ref-7)
8. Щеклеин В.С. Моделирование информационных систем: конспект лекций / В.С. Щеклеин. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. С. 9. [↑](#footnote-ref-8)
9. Щеклеин В.С. Моделирование информационных систем: конспект лекций / В.С. Щеклеин. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. С. 13. [↑](#footnote-ref-9)
10. Щеклеин В.С. Моделирование информационных систем: конспект лекций / В.С. Щеклеин. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. С. 15. [↑](#footnote-ref-10)
11. Щеклеин В.С. Моделирование информационных систем: конспект лекций / В.С. Щеклеин. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. С. 16. [↑](#footnote-ref-11)